Teoria przestrzeni Hilberta
Lista 3 (przykłady operatorów)

Zad 1. Pokazać, że jeśli $A : H_1 \to H_2$ jest operatorem liniowym i $\dim(H_1) < \infty$, to A jest ograniczony.

Zad 2. Niech $\{e_1, e_2, ...\}$ będzie bazą ortonormalną przestrzni Hilberta H i niech $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem liczb zespolonych. Pokazać, że operator dany wzorem

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n$$

jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ograniczony. Wyznaczyć operator sprzężony do A.

Zad 3. Pokazać, że macierz nieskończona $[a_{ij}]_{i,j=1}^{\infty}$ taka, że

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < \infty \tag{1}$$

definiuje operator ograniczony $A : \ell_2 \to \ell_2$ standarodwym wzorem, tzn.

$$A(x_1, x_2, ...) = (y_1, y_2, ...),$$

gdzie

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Pokazać, że każdy operator $A \in L(\ell_2)$ jest zadany w powyższy sposób, dla pewnej macierzy, niekoniecznie spełniającej (1). Jak wygląda macierz odpowiadająca operatorowi sprzężonemu?

Zad 4. Niech $H = L_2[a, b]$ i niech $a \in C[a, b]$. Pokazać, że operator $A : H \to H$

$$(Af)(t) = a(t)f(t)$$

jest ograniczony. Wyznaczyć jego normę oraz operator do niego sprzężony.

Zad 5. Niech $K \in L_2([a, b] \times [a, b])$. Udowodnić, że operator $T : L_2[a, b] \to L_2[a, b]$ zdefiniowany wzorem

$$(Tx)(s) = \int_a^b K(s, t)x(t)dt$$

jest operatorem ograniczonym. Wyznaczyć operator do niego sprzężony,

Definicja. Operator liniowy $A : H_1 \to H_2$, którego obraz $\mathrm{Im}\,(A) = \{Ax : x \in H_1\}$ jest wymiaru skończonego nazywamy *operatorem skończonego rzędu*, a wymiar $\mathrm{Im}\,(A)$ nazywamy *rzędem* A.

Zad 6. Pokazać, że K jest operatorem skończonego rzędu wtedy i tylko wtedy, gdy K jest postaci

$$Kx = \sum_{i=1}^{n} \langle x, v_i \rangle \varphi_i.$$

Wyciągnąć stąd wniosek, że operator skończonego rzędu jest ograniczony i jego sprzężenie też jest operatorem skończonego rzędu.